ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HỒNG TÂM

MỘT SỐ TÍNH CHẤT VỀ NGHIỆM CỦA ĐA THỨC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HỒNG TÂM

MỘT SỐ TÍNH CHẤT VỀ NGHIỆM CỦA ĐA THỨC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. TRẦN NGUYÊN AN

THÁI NGUYÊN - 2016

Mục lục

MỞ ĐẦU

Trong Toán học nói chung và trong chương trình toán học phổ thông nói riêng chuyên đề đa thức là một trong những chuyên đề quan trọng, quen thuộc, phổ dụng và có nhiều ứng dụng phong phú. Một vấn đề có lịch sử phát triển lâu đời và được nhiều người quan tâm là phương trình đa thức. Khi tìm hiểu phương trình đa thức (trên miền đang xét) nhiều câu hỏi tự nhiên đặt ra: phương trình có nghiệm không, tìm nghiệm của phương trình, phương trình có bao nhiêu nghiệm, vị trí nghiệm (trên các trường số) ...

Từ thời xa xưa người Hylạp đã tìm ra cách giải phương trình (đa thức) bậc hai. Phương trình bậc ba, bậc bốn có cách giải từ thế kỉ XVI. Khoảng 300 năm sau đó, người ta tiếp tục tìm cách giải các phương trình bậc cao hơn nhưng không có kết quả. Mãi đến những năm 20 của thế kỉ XIX Abel mới chứng minh được rằng phương trình bậc $n,\ n \geq 5$ là không giải được, có nghĩa là không thể có công thức biểu diễn nghiệm qua các hệ số của phương trình bằng căn thức. Tuy nhiên kết quả của Abel không loại trừ khả năng là các nghiệm của đa thức cụ thể với hệ số thực hay phức có giải được bằng căn thức. Mãi đến những năm 30 của thế kỷ XX, Galois mới giải quyết trọn vẹn vấn đề về điều kiện để phương trình cụ thể cho trước giải được bằng căn thức. Các vấn đề trên đây đã được tìm hiểu một phần trong chương trình đại học.

Khi không xác định được một cách cụ thể nghiệm của một đa thức ta xét đến bài toán xác định số nghiệm của đa thức. Quy tắc xét dấu Descartes, Định lý Budan-Fourier và Định lý Sturm là những công cụ hữu hiệu cho việc xác định số nghiệm thực của đa thức. Đôi khi xác định số nghiệm là chưa đủ ta cần xác định vị trí nghiệm, chẳng hạn khoảng hay đoạn số thực chứa nghiệm. Trong thực tế ta lại cần xác định giá trị xấp xỉ của nghiệm. Đối với vấn đề này phương pháp do Newton đề xuất là hữu hiệu và dễ tiếp cận.

Mục đích của luận văn là tìm hiểu một số tính chất về nghiệm của đa thức. Luận văn nhấn mạnh vào việc tìm hiểu số nghiệm và biên nghiệm của đa thức.

Ngoài phần mở đầu, kết luận, và tài liệu tham khảo, luận văn gồm hai chương. Chương 1 trình bày sơ lược về vành đa thức, nghiệm của đa thức, đa thức trên các trường số phức, trường số thực và trường số hữu tỉ, công thức nghiệm Viete. Trong chương 2, luận văn trình bày về số nghiệm và biên nghiệm của đa thức. Cụ thể về công thức nghiệm cơ bản, số nghiệm của đa thức, một số định lý đánh giá về số nghiệm của đa thức như: Định lý Budan - Fourier, định lý Sturm, định lý Sturm mở rộng cũng như quy tắc dấu Descartes. Bên cạnh đó luận văn trình bày việc đánh giá số nghiệm bằng công cụ giải tích. Một số chặn nghiệm, đặc biệt phương pháp sử dụng ma trận để đánh giá nghiệm của đa thức, ứng dụng biên nghiệm để xét tính bất khả quy của đa thức cũng được trình bày trong luận văn này.

Trong suốt quá trình làm luận văn, tôi nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ tận tình của TS. Trần Nguyên An. Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành đến quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học toán khoá 8 đã truyền thụ đến cho tôi nhiều kiến thức và kinh nghiệm nghiên cứu khoa học.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2016,

Nguyễn Thị Hồng Tâm

Chương 1

Đa thức và nghiệm của đa thức

1.1. Đa thức và nghiệm của đa thức

Giả sử R là vành giao hoán có đơn vị. Đặt

$$P = \{(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in R^{\mathbb{N}} | a_i = 0 \text{ với i đủ lớn } \}.$$

Ta định nghĩa phép cộng và phép nhân trong P như sau. Giả sử $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, $(b_0, b_1, b_2, \ldots) \in P$

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) + (b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n, \ldots),$$

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)(b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots) = (c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots),$$

với $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0 = \sum\limits_{i+j=k} a_i b_j, k = 0, 1, 2, \ldots$ Dễ thấy đó là các phép toán trên P và cùng với hai phép toán đó P là một vành giao hoán, có đơn vị. Phần tử không là $(0, 0, 0, \ldots)$, phần tử đối của $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ là $(-a_0, -a_1, \ldots, -a_n, \ldots)$, phần tử đơn vị là $(1, 0, \ldots, 0, \ldots)$.

Ký hiệu $x = (0, 1, 0, 0, \ldots) \in P$. Dễ dàng kiểm tra được

$$\begin{aligned} x^2 &= (0, 0, 1, 0, 0, \ldots), \\ x^3 &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots), \\ &\ldots \\ x^k &= (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots), \end{aligned}$$

trong đó x^k là dãy có toạ độ thứ $k+1$ bằng 1, còn các toạ độ khác đều bằng 0. Xét ánh xạ $\varphi : R \to P$ xác định bởi $\varphi(a) = (a, 0, 0, \ldots)$ với mọi

$a \in R$. Rõ ràng φ là đơn cấu vành. Vì thế ta có thể coi R như là vành con của P. Từ đơn cấu φ ở trên, ta có thể đồng nhất

$$(0, \ldots, 0, a, 0, \ldots) = (a, 0, 0, \ldots)(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) = ax^k,$$

trong đó vị trí thứ $k+1$ của $(0, \ldots, 0, a, 0, \ldots)$ là a, còn các vị trí khác là 0. Vì thế mỗi dãy $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$ của P được đồng nhất với biểu thức $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. Ta thường viết phần tử của P theo số mũ tăng dần hoặc giảm dần, tức là viết $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ hoặc $a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$.

Định nghĩa 1.1.1. Vành P được gọi là *vành đa thức* của ẩn x lấy hệ tử trong R, hay vắn tắt vành đa thức của ẩn x lấy hệ tử trong R, và ký hiệu là $R[x]$. Các phần tử của vành đó gọi là *đa thức* của ẩn x lấy hệ tử trong R và thường được ký hiệu bởi $f(x), g(x), h(x), \ldots$ Trong một đa thức

$$f(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0,$$

các $a_i, i = 0, 1, \ldots, n$ gọi là các *hệ tử* của đa thức. Các a_ix^i gọi là *các hạng tử* của đa thức, đặc biệt a_0 gọi là *hạng tử tự do*.

Nếu $a_n \neq 0$ thì a_n được gọi là *hệ số cao nhất* của $f(x)$ và n được gọi là *bậc* của $f(x)$. Ta kí hiệu bậc của $f(x)$ là $\deg(f(x))$. Người ta thường quy ước bậc của đa thức 0 là $-\infty$. Một đa thức khác 0 được gọi là *monic* nếu hệ số cao nhất của nó là 1. Các đa thức bậc 0 được gọi là đa thức hằng. Các đa thức bậc 1 được gọi là đa thức *tuyến tính*.

Kết quả sau đây suy ra ngay từ định nghĩa của phép cộng và phép nhân các đa thức.

Bổ đề 1.1.2. *Với mọi $f(x), g(x) \in R[x]$, ta có*

$$\deg(f(x) + g(x)) \leq \max\{\deg(f(x)), \deg(g(x))\};$$

$$\deg(f(x)g(x)) \leq \deg(f(x)) + \deg(g(x)).$$

Nếu R là miền nguyên thì

$$\deg(f(x)g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x)).$$

Hệ quả 1.1.3. Nếu R là miền nguyên, thì $R[x]$ cũng là miền nguyên.

Định lý 1.1.4 (Chia với dư). *Cho $f(x), g(x) \in R[x]$, với R là một trường và $g(x) \neq 0$. Khi đó tồn tại duy nhất hai đa thức $q(x)$ và $r(x)$ thuộc $R[x]$ sao cho: $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ và $\deg r(x) < \deg g(x)$.*

Chú ý 1.1.5. Đa thức $q(x)$ gọi là *thương* và $r(x)$ goi là *dư* của phép chia $f(x)$ cho $g(x)$.

Định lí trên vẫn đúng khi R là miền nguyên và hệ số cao nhất của $g(x)$ khả nghịch trong R.

Trong thuật toán chia với dư trên đây, nếu các hệ số của $f(x)$ và $g(x)$ là những số thực (tương ứng hữu tỉ) thì các hệ số của thương $q(x)$ và dư $r(x)$ đều là thực (tương ứng hữu tỉ).

Thuật toán chia dư giúp ta tìm ƯCLN của hai đa thức.

Định nghĩa 1.1.6. Giả sử R là vành con của vành S, và $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ là một đa thức trong $R[x]$. Với mỗi phần tử $\alpha \in S$, ta kí hiệu $f(\alpha) = a_n \alpha^n + \cdots + a_1 \alpha + a_0 \in S$. Phần tử $\alpha \in S$ được gọi là *nghiệm* của $f(x)$ nếu $f(\alpha) = 0$. Trong trường hợp này ta cũng nói α là một *nghiệm* của phương trình $f(x) = 0$ trên S. Tìm các nghiệm của $f(x)$ trên S được gọi là *giải phương trình đa thức* $f(x) = 0$ trên S.

Định lý 1.1.7 (Định lý Bézout). *Cho R là một miền nguyên, $f(x) \in R[x], \alpha \in R$. Điều kiện cần và đủ để α là một nghiệm của $f(x)$ là $f(x)$ chia hết cho $(x - \alpha)$.*

Từ kết quả trên ta có sơ đồ chia Horner: chia đa thức $f(x)$ cho $x - a$. Giả sử R là miền nguyên $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ là một đa thức trong $R[x]$. Chia $f(x)$ cho $x - a, a \in R$, ta được thương dạng $g(x) = b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, dư $r \in R$. Vì $f(x) = (x - a)g(x) + r$

nên ta có

$$\begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ \cdots \\ b_{i-1} = a_i + ab_i \\ \cdots \\ b_0 = a_1 + ab_1 \\ r = a_0 + b_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Sơ đồ giúp ta tìm thương $g(x)$ và dư r trong phép chia $f(x)$ cho $x - a$, trong đó $b_i, i = 0, \cdots, n-1$ được xác định theo 1.1 được gọi là sơ đồ chia Hocner

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_1	a_0
α	b_{n-1}	b_{n-2}	$\dots$	b_0	r

Chú ý: Bằng phương pháp tương tự như trên ta cũng có sơ đồ Horner khi chia cho đa thức bậc hai $x^2 + px + q$.

Thực hiện liên tiếp các phép chia cho $x - a$, ta có khai triển Taylor của $f(x)$ tại a, tức là $f(x)$ có thể khai triển duy nhất dưới dạng

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} &f(x) = (x-a)f_0(x) + r_0, r_0 \in R, \deg(f_0(x)) = n-1, \\ &f_0(x) = (x-a)f_1(x) + r_1, r_1 \in R, \deg(f_1(x)) = n-2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &f_{n-2}(x) = (x-a)f_{n-1}(x) + r_{n-1}, r_{n-1} \in R, \deg(f_{n-1}(x)) = 1, \\ &f_{n-1} = (x-a)a_n. \end{aligned}$$

Thế ngược lên ta có

$$f(x) = a_n(x-a)^n + r_{n-1}(x-a)^{n-1} + \cdots + r_1(x-a) + r_0.$$

Đặt $c_n = a_n, c_{n-1} = r_{n-1}, \dots, c_1 = r_1, c_0 = r_0$, ta có điều phải chứng minh.

Bổ đề 1.1.8. *Cho $f(x) \in R[x]$. Phần tử $a \in R$ là nghiệm bội k của $f(x)$ nếu và chỉ nếu $f(x) = (x-a)^k g(x)$ với $g(x) \in R[x]$ và $g(a) \neq 0$.*

Sử dụng công cụ đạo hàm ta có thể mô tả khác cho các hệ tử trong khai triển Taylor của $f(x)$ tại a.

Định nghĩa 1.1.9. Cho $f(x) \in R[x]$ với R là miền nguyên.
(i) Nếu $f(x) = a_0 \in R$, đặt $f'(x) = 0$. Nếu $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ với $n \geq 1$, đặt $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$. Ta gọi $f'(x)$ là *đạo hàm (hình thức)* của $f(x)$.
(ii) Đặt $f^{(0)}(x) = f(x), f^{(1)}(x) = f'(x), ..., f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)}(x))', \forall k \in \mathbb{N}^*$. Ta nói $f^{(k)}(x)$ là *đạo hàm cấp k* của $f(x)$ với $k \in \mathbb{N}$.

Trong trường hợp R là trường số thực $\mathbb{R}$ thì đạo hàm hình thức ở đây là đạo hàm của hàm số $f(x)$.

Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai đa thức thì đạo hàm hình thức của tổng và tích của hai đa thức này như sau

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$
$$(f.g)'(x) = f'.g(x) + f.g'(x)$$

Chú ý. Trong trường hợp R là trường có đặc số 0 thì các hệ số c_k trong khai triển Taylor có thể tính theo các đạo hàm của $f(x)$ như sau:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},$$

nghĩa là

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Trong trường hợp $a = 0$, ta có khai triển Maclaurin

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Định nghĩa 1.1.10 (Nghiệm bội). Cho $f(x) \in R[x], \alpha \in R, k \in \mathbb{Z}, k \geq 1$. Ta gọi α là *nghiệm bội k* của $f(x)$ nếu $f(x)$ chia hết cho $(x-\alpha)^k$